ЗАУЗЛЕННЫЕ СФЕРЫ С ПОСТОЯННЫМ ОТНОШЕНИЕМ

Савельев Валерий Михайлович
(Украина, г. Луганск, Оборонная 2)
E-mail: svm59@mail.ru

В полупространстве $E^3_+(0)$, определяемом условием $x_4 = 0$, $x_3 \geq 0$, возьмем дугу γ с концами на плоскости $\pi : x_4 = 0$, $c_3 = 0$. Полупространство $E^3_+(0)$ будем вращать вокруг плоскости π. Пространство $E^3_+(0)$, повернутое на угол φ, будем обозначать $E^3_+(\varphi)$. При вращении на $360°$ точки дуги γ, находящиеся в $E^3_+(\varphi)$, заметут множество S, гомеоморфное сфере S^2. Полученная поверхность заузлена (см [1]). Поэтому эта гладкая поверхность называется *заузленной сферой.* Радиус-вектор заузленной сферы можно записать в виде

$$\mathbf{X}(u,v) = \begin{pmatrix} x_1(u) \\ x_2(u) \\ x_3(u)\cos v - x_4(u)\sin v \\ x_3(u)\sin v + x_4(u)\cos v \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где кривая $\mathbf{X}(u,0)$ есть профильная кривая этой поверхности.

В настоящей работе рассматривается случай заузленной сферы у которой профильная кривая плоская, радиус-вектор которой имеет вид

$$\mathbf{X}(u,0) = (\rho(u)\cos u, \rho(u)\sin u, \rho(u)\cos u, \rho(u)\sin u). \tag{2}$$

Несложно подсчитать касательную $\mathbf{X}^T$ и нормальную $\mathbf{X}^\perp$ компоненты радиус-вектора заузленной сферы. Имеем

$$\|\mathbf{X}^T\| : \|\mathbf{X}^\perp\| = \frac{\rho'}{\rho}.$$

Если отношение длины касательной компоненты к длине нормальной компоненты постоянно на подмногобразии $F^n \subset E^{n+m}$, то говорят о подмногообразии *постоянного отношения.* Таким образом имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $F^2 \subset E^4$ есть заузленная сфера, заданная радиус-вектором (1). Тогда поверхность F^2 есть поверхность постоянного отношения если и только если профильная кривая является кривой постоянного отношения и $\rho(u) = c_1 e^{c_2 u}$, где c_1 и c_2 есть действительные постоянные.*

Литература

[1] Аминов Ю.А. *Геометрия подмногообразий.* Киев: Наукова думка, 2002,468 с.
[2] Chen B. Y. *Constant ratio Hypersurfaces*, Soochow J. of Math. 28 (2001), 353-362.